

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2019 - 2020
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I DEL 7 FEBBRAIO 2020

COGNOME e NOME: (SCRIVERE IN STAMPATELLO)	
MATRICOLA:	

## Compito A

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula.

Il **requisito minimo** per superare la prova scritta ed essere ammessi al colloquio orale è di svolgere l'esercizio 3 e altri due esercizi del **quesito di tipo E**. Inoltre occorre svolgere correttamente **almeno un quesito di tipo D e un solo quesito di tipo T**.

Tempo disponibile: **180 minuti**.

### Quesiti di tipo E (*esercizi*.)

- 1) Calcolare il dominio della funzione reale  $f$  definita dalla legge  $f(x) = \log(\sqrt{2 \cos x} - 1)$ .

---

- 2) Calcolare il seguente limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} - 2x}{\log\left(\frac{x}{x+1}\right)}$ .

---

- 3) Considerata la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 4|}}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

determinare il dominio di esistenza, eventuali asintoti. Studiare la continuità, la derivabilità, la monotonia e determinare gli estremi relativi e assoluti. Infine tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Inoltre,

- dire per quali valori di  $k$  l'equazione  $\frac{\sqrt{|x^2 - 4|}}{x} e^{-\frac{1}{x}} = k$  ammette un'unica soluzione negativa;
- calcolare  $f(1)$  e determinare la derivata di  $f^{-1}(y)$  nel punto  $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{e}$ .

---

- 4) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{4x \log(1+x)}{(x^2 - 1)^2} dx$$

e il seguente integrale improprio

$$\int_8^{+\infty} \frac{8 \log(1 + \sqrt{x+1})}{x^2} dx$$

---

- 5) Dire per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \left(\frac{1}{2} + x^2\right)^n}{n^2 \sqrt{n} + 1}$  è divergente.

LA PROVA CONTINUA NELL'ALTRA PAGINA

↔

### Quesiti di tipo D (*definizioni*)

- 1) Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ . Si dice che  $x_0$  è un PUNTO DI MINIMO RELATIVO per  $f$  se ... (completare). Un punto di minimo assoluto è anche di minimo relativo? (giustificare la risposta)

Portare un esempio, anche grafico, di funzione che ammette un minimo relativo ma non ammette minimo assoluto.

---

- 2) Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione numerica. Si chiama SERIE NUMERICA di termine generale  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ... (completare). Una serie numerica è CONVERGENTE e ha per somma  $S$  se ... (completare).

Portare un esempio di serie convergente e una di serie indeterminata.

---

### Quesiti di tipo T (*teoremi*)

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat sugli estremi relativi. Portando un esempio, dire perché il teorema di Fermat è solo una condizione necessaria.
- 

- 2) Enunciare e dimostrare il teorema di integrabilità secondo Riemann delle funzioni monotone limitate.
-

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Anno Accademico 2019 - 2020
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I DEL 7 FEBBRAIO 2020

COGNOME e NOME: (SCRIVERE IN STAMPATELLO)	
MATRICOLA:	

## Compito B

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula.

Il **requisito minimo** per superare la prova scritta ed essere ammessi al colloquio orale è di svolgere l'esercizio 3 e altri due esercizi del **quesito di tipo E**. Inoltre occorre svolgere correttamente **almeno un quesito di tipo D e un solo quesito di tipo T**.

Tempo disponibile: **180 minuti**.

### Quesiti di tipo E (*esercizi*.)

- 1) Calcolare il dominio della funzione reale  $f$  definita dalla legge  $f(x) = \sqrt{\sqrt{2} \sin x - 1}$ .

---

- 2) Calcolare il seguente limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\sqrt{9x^2 - 1} - 3x}$ .

---

- 3) Considerata la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 4x|}}{x - 2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

determinare il dominio di esistenza, eventuali asintoti. Studiare la continuità, la derivabilità, la monotonia e determinare gli estremi relativi e assoluti. Infine tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Inoltre,

- dire per quali valori di  $k$  l'equazione  $\frac{\sqrt{|x^2 - 4x|}}{x - 2} e^{\frac{1}{x-2}} = k$  ammette un'unica soluzione positiva;
- calcolare  $f(3)$  e determinare la derivata di  $f^{-1}(y)$  nel punto  $y_0 = \sqrt{3}$  e.

---

- 4) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{4x \arctan x}{(x^2 - 1)^2} dx$$

e il seguente integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{8 \arctan \sqrt{x+1}}{x^2} dx$$

---

- 5) Dire per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} x^{2n}}{n^2 + 1}$  è divergente.

LA PROVA CONTINUA NELL'ALTRA PAGINA



**Quesiti di tipo D (*definizioni*)**

- 1) Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è LIMITATA in  $(a, b)$  se ... (completare). Un numero reale  $m$  si dice MINIMO (ASSOLUTO) DI  $f$  in  $(a, b)$  se ... (completare)

Portare un esempio, anche grafico, di funzione limitata che non ammette minimo (assoluto).

---

- 2) Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione numerica. Si dice che la successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  DIVERGE NEGATIVAMENTE e si indica con il simbolo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$  se ... (completare).

Portare un esempio di successione divergente negativamente e una di successione oscillante.

---

**Quesiti di tipo T (*teoremi*)**

- 1) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass. Giustificando la risposta, dire se ogni funzione continua ammette sempre massimo e minimo (assoluto).
- 

- 2) Enunciare e dimostrare il teorema di regolarità delle successioni monotone.
-